



RİJİT TEMEL ÜZERİNE OTURAN TABAKALI BİR ORTAMDA AYRILMALI TEMAS PROBLEMİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ

Gökhan Adıyaman¹ ve Ahmet Birinci²
^{1,2}Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

ABSTRACT

In this study, the general solution of a receding contact problem of layered medium resting on rigid foundation was considered. The layered medium consists of N homogeneous layer with varying material properties and height. The contact surfaces can be receding or adherent. The problem will include M receding contact surfaces. The layered medium loaded with n concentrated loads transmitted by circular stamps and r distributed loads. The problem was reduced to integral equation system using elasticity theory and Fourier integral transform. The numerical solution of the system was done by using Matlab. A program was written to solve the problem given by the user with any geometry and loading. The program was tested with two studies from the literature and it was shown that the results were compatible.

ÖZET

Bu çalışmada rijit temel üzerine oturan tabakalı bir ortamda ayrılmalı temas probleminin genel çözümü yapılmıştır. Tabakalı ortam malzeme özellikleri ve yüksekliği değişebilen N adet homojen tabakadan oluşmaktadır. Temas yüzeyleri yapışık veya ayrılmalı olabilir. Problem toplamda M adet yapışık olmayan temas yüzeyinden oluşmaktadır. Tabakalı ortam dairesel punç ile iletilen n adet tekil yük ve r adet yayılı yük ile yüklenmektedir. Problem elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak integral denklem sisteminin çözümüne indirgenerek sistemin sayısal çözümü Matlab kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kullanıcı tarafından girilecek herhangi bir geometri ve yükleme durumuna ilişkin çözümler yazılan bir program ile yapılmıştır. Yazılan programın kontrolü için literatürden seçilecek iki çalışma ile programın sonuçları karşılaştırılmış ve sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür.

GİRİŞ

Temas mekaniği konusuna Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On the contact of elastic solids” adlı makaleyle girildiği söylenebilir [1]. Elastisite teorisinin ifadeleri karışık ve uzun olmasına karşın elemanter teoriye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak elastisite teorisi kullanılarak mühendislik yapılarının gerilme ve şekil değiştirme problemlerinin çözümü de yoğunluk kazanmış ve temas problemi konusundaki çalışmalarda önemli artışlar kaydedilmiştir.

Yapılan çalışmalarda, tabakalı ortamların ayrılma problemi genel olarak iki tipte ele alınmaktadır. Birinci tip problemlerde ağırlığın etkisi göz önünde bulundurulmakta ve ayrılma

sonlu bir bölgede gerçekleşmektedir. İkinci tip problemlerde ise ağırlığın etkisi ihmal edilmekte ve ayrılma bölgesi sonsuz uzunlukta olmaktadır. Literatürde, bu tip problemler “ayrılmalı temas (receding contact)” olarak isimlendirilmektedir ve bu çalışma bahis geçen ikinci gruba girmektedir. Literatürde ayrılmalı temasla ilişkin çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Yayıllı yük aracılığıyla yüklenmiş ve yarım düzlem üzerine oturan sonsuz uzunluklu elastik tabakanın temas problemi Keer vd. [2] tarafından çalışılmıştır. Ratwani ve Erdoğan [3], baskı uygulanan elastik tabaka ile altındaki elastik yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Dempsey vd. [4], Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki temas problemini ele almışlardır. Üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş ve alttan rijit bir blok ile bastırılan bir tabakanın temas problemi Kahya [5] tarafından incelenmiştir. Birinci ve Erdöl [6], basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve rijit bloğun sürtünmesiz temas problemi Çömez [7] tarafından incelenmiştir. Adıyaman [8], iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre çözmüştür.

Literatürdeki mevcut çalışmalarda tabaka sayıları, yükleme durumları ve temel türleri farklılık göstermekte ve çözüm yöntemleri benzer olmakla beraber analitik çözümün her biri için ayrı ayrı yapılması gerekmektedir. Bu çalışma ile rijit temel üzerine oturan tabakalı bir ortamda ayrılmalı temas problemlerinin genel çözümü yapılarak, bu çözümü esas alan bir bilgisayar programı ile kullanıcı tarafından girilecek herhangi bir geometri ve yükleme durumuna ilişkin sonuçlar elde edilecektir.

PROBLEMİN TANIMI

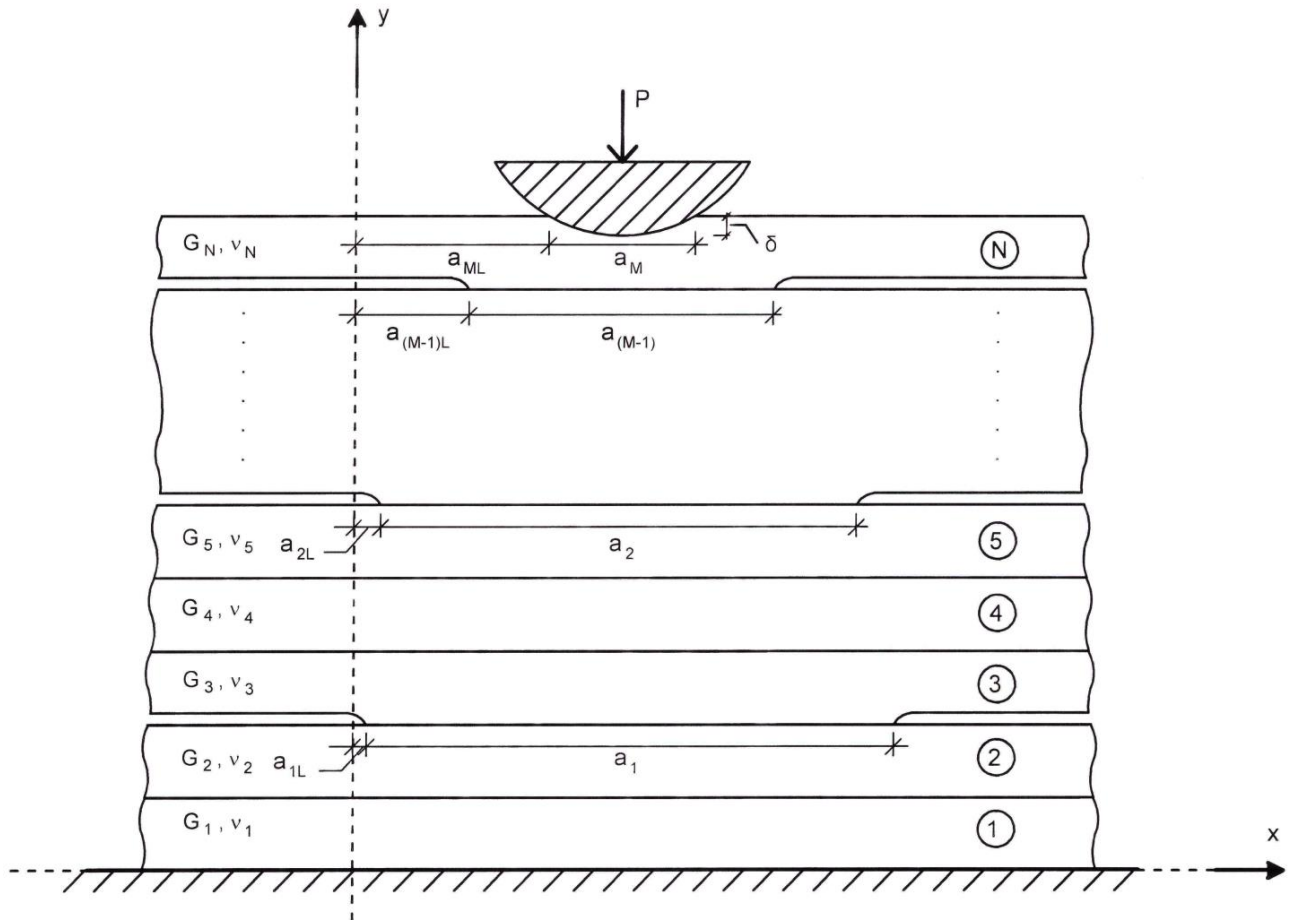
Bu çalışmada, rijit temel üzerine oturan tabakalı bir ortamda ayrılmalı temas probleminin genel çözümü yapılacaktır. Problemin yükleme durumu ve geometrisi temsili olarak Şekil 1’de verilmektedir.

Tabakalı ortam malzeme özellikleri ve yüksekliği değişebilen N adet homojen tabakadan oluşmaktadır. Tabakalar arasındaki temas yüzeyleri yapışık veya yapışık olmayan (ayrılmalı temas) temas şeklinde seçilebilmekte, temas yüzeylerinin yapışık olmaması halinde yükleme durumuna göre temas mesafeleri değişmektedir. Problemin toplamda M adet mesafeleri değişen temas yüzeyinden oluştuğu kabul edilecek olup bu temas yüzeylerinden m tanesi tabakalar arasında, n tanesi ise rijit bloklar altındaki temas yüzeyleri olup, $M=m+n$ şeklinde tanımlanabilmektedir.

Tabakalı ortam aşağıda verilen yükleme durumları ile yüklenmiş olabilir:

- Rijit dairesel bir panç ile iletilen tekil yük (Bir veya daha fazla olabilir, n adet)
- Yayıllı yük (bir veya daha fazla olabilir, r adet)
- a ve b durumlarının beraber etkimesi

Çözüm yapılırken tabakalı ortamın temele yapışık olduğu kabulü yapılacaktır. Ayrıca tüm yüzeylerdeki sürtünmeler ve tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilecektir. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınacaktır.



Şekil 1. Probleme ait geometri ve yükleme durumunun temsili gösterimi

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Tabakanın alt yüzeyinden geçen yerel eksen takımına (x, y_i) göre i . tabakaya ait yer değiştirmeler cinsinden denge denklemleri (Navier denklemleri) düzlem halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\lambda_i + G_i) \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y_i} \right] + G_i \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2} \right] = 0 \quad (1a)$$

$$(\lambda_i + G_i) \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} \right] + G_i \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_i^2} \right] = 0 \quad (1b)$$

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerden oluşan (1) ifadeleri Fourier integral dönüşümü kullanılarak kısmi diferansiyel denklemlere dönüştürülüp çözülürse tabakalar aşağıda verilen gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilir.

$$u_i(x, y_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[(A_{i1} + A_{i2} y_i) e^{-\xi y_i} + (A_{i3} + A_{i4} y_i) e^{\xi y_i} \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (2a)$$

$$v_i(x, y_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ -i \left[A_{i1} + \left(\frac{\kappa_i}{\xi} + y_i \right) A_{i2} \right] e^{-\xi y_i} + i \left[-A_{i3} + \left(\frac{\kappa_i}{\xi} - y_i \right) A_{i4} \right] e^{\xi y_i} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (2b)$$

$$\sigma_{x_i}(x, y_i) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2G_i \xi i \left\{ \begin{aligned} & \left[\xi(A_{i1} + A_{i2}y_i) - \frac{3-\kappa_i}{2} A_{i2} \right] e^{-\xi y_i} \\ & + \left[\xi(A_{i3} + A_{i4}y_i) + \frac{3-\kappa_i}{2} A_{i4} \right] e^{\xi y_i} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} dx \quad (3a)$$

$$\sigma_y(x, y_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2G_i \xi i \left\{ \begin{aligned} & - \left[\xi(A_{i1} + A_{i2}y_i) + \frac{\kappa_i+1}{2} A_{i2} \right] e^{-\xi y_i} \\ & + \left[-\xi(A_{i3} + A_{i4}y_i) + \frac{\kappa_i+1}{2} A_{i4} \right] e^{\xi y_i} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} dx \quad (3b)$$

$$\tau_{xy}(x, y_i) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2G_i \xi \left\{ \begin{aligned} & - \left[\xi(A_{i1} + A_{i2}y_i) + \frac{\kappa_i-1}{2} A_{i2} \right] e^{-\xi y_i} \\ & + \left[\xi(A_{i3} + A_{i4}y_i) - \frac{\kappa_i-1}{2} A_{i4} \right] e^{\xi y_i} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} dx \quad (3c)$$

Bu ifadelerde geçen G_i , i . tabakaya ait kayma modülünü ifade etmektedir. κ_i , i . tabakaya ait bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ şeklindedir. κ_i ifadesinde geçen ν_i Poisson oranını göstermektedir. A_{ij} ($i=1,2,3,\dots,N$; $j=1,2,3,4$) ifadeleri bilinmeyen katsayı fonksiyonları olup probleme ilişkin sınır şartları kullanılarak bulunacaktır.

Probleme ait sınır şartları tabakalar arası tanımlanacak ayrılma durumlarına göre farklılık gösterse bile aşağıdaki gibi genel olarak tanımlanabilir.

i) Rijit Temel ile 1. Tabakanın Ara Yüzeyinde Sınır Şartları (2 adet sınır şartı)

$$u_1(x, 0) = 0, \quad v_1(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4a,b)$$

ii) i . Tabaka ile $(i+1)$. Tabakanın Ara Yüzeyindeki Sınır Şartları ($i=1,2,3,\dots,N-1$)

Tabakalar Arası Ayrılma Olmaması Durumu (4 adet sınır şartı)

$$u_i(x, h_i) - u_{i+1}(x, 0) = 0, \quad v_i(x, h_i) - v_{i+1}(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5a,b)$$

$$\sigma_{y_i}(x, h_i) - \sigma_{y_{i+1}}(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy_i}(x, h_i) - \tau_{xy_{i+1}}(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5c,d)$$

Tabakalar Arası Ayrılma Olması Durumu, j . ayrılmalı temas yüzeyi için (5 adet sınır şartı)

$$\sigma_{y_i}(x, h_i) = -p_j(x), \quad \sigma_{y_{i+1}}(x, 0) = -p_j(x), \quad (a_{jL} \leq x \leq a_{jR}) \quad (6a,b)$$

$$\tau_{xy_i}(x, h_i) = 0, \quad \tau_{xy_{i+1}}(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6c,d)$$

$$\frac{\partial v_i(x, h_i)}{\partial x} - \frac{\partial v_{i+1}(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad (a_{jL} \leq x \leq a_{jR}), \quad (j=1,2,3,\dots,m) \quad (7)$$

iii) N . Tabakanın Üst Yüzeyine İlişkin Sınır Şartları (2+n adet sınır şartı)

$$\tau_{xy_N}(x, h_N) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (8a)$$

$$\sigma_{y_N}(x, h_N) = \begin{cases} q_1(x), & b_{1L} \leq x \leq b_{1R} \\ \vdots & \vdots \\ q_r(x), & b_{rL} \leq x \leq b_{rR} \\ p_{m+1}(x), & a_{(m+1)L} \leq x \leq a_{(m+1)R} \\ \vdots & \vdots \\ p_{m+n}(x), & a_{(m+n)L} \leq x \leq a_{(m+n)R} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (8b)$$

$$\frac{\partial v_N(x, h_N)}{\partial x} = f_j, \quad a_{jL} \leq x \leq a_{jR}, \quad (j = m+1, m+2, m+3, \dots, m+n) \quad (9)$$

Bu ifadelerde:

- u_i, v_i : sırasıyla i . tabakaya ait x_i ve y_i doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini
- h_i : i . tabakanın yüksekliğini
- p_j : j . temas yüzeyine ait bilinmeyen temas gerilme fonksiyonunu ($j=1,2,3,\dots,m$)
- a_{jL}, a_{jR} : sırasıyla j . temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktalarını
- q_j : j . yayılı yüke ait yük fonksiyonunu ($j=1,2,3,\dots,r$)
- b_{jL}, b_{jR} : sırasıyla j . yayılı yükün başlangıç ve bitiş noktalarını

göstermektedir.

(4-9) ifadelerinden, tanımlanan probleme uygun olarak $4N-2$ tanesi gerilmeler cinsinden ve $M+2$ tanesi ise yer değiştirmeler cinsinden olmak üzere toplam $4N+M$ tane sınır şartı seçilir. (4,5,6,8) ifadelerinden seçilen sınır şartları kullanılarak yer değiştirme ifadelerindeki bilinmeyen A_{ij} ($i=1..N, j=1..4$) katsayı fonksiyonları bilinmeyen p_j ($j=1..M$) temas gerilme fonksiyonlarına bağlı olarak bulunabilir. (7,9) ifadelerinden seçilen ve henüz kullanılmayan sınır şartları kullanılarak bilinmeyen p_j temas gerilme fonksiyonlarının çözümü için M adet integralden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilebilir. Bu denklem sistemi boyutsuzlaştırıldıktan sonra sayısal çözümü Erdogan ve Gupta'da [9] önerildiği gibi Matlab programı kullanılarak yazılacak bir program ile yapılabilir.

Yazılan program, kullanıcı tarafından girilen probleme göre (4-9) sınır şartlarından uygun olanları kullanarak problemin çözümünü [9] numaralı kaynakta verildiği gibi yapmaktadır. Problemin çözümü tamamlandıktan sonra tabakaların her hangi bir noktasındaki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri veya istenilen grafikler yine program aracılığıyla elde edilebilecektir.

SAYISAL SONUÇLAR

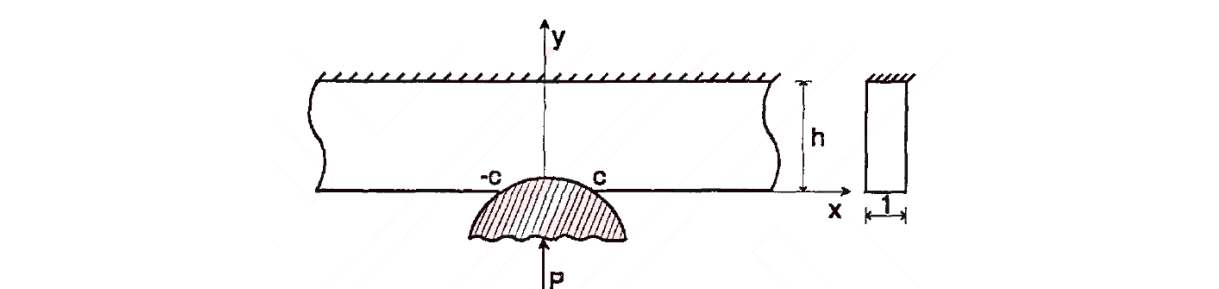
Bu bölümde, program kullanılarak elde edilen sonuçlar ile literatürden seçilen çalışmaların sonuçlarının karşılaştırılması verilmektedir.

Literatürdeki sonuçlara ait grafik verileri “Engauge Digitizer” isimli program kullanılarak grafik resimlerinin dijitalleştirilmesi ile elde edilmiştir. Elde edilen değerler karşılaştırılırken kullanılan “% Fark” aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\% \text{ Fark} = \frac{x_l - x_y}{x_l} * 100 \quad (10)$$

Burada x_l literatürden seçilen problemdeki sonucu, x_y ise yapılan çalışmada elde edilen sonucu göstermektedir.

İlk çalışma olarak Kahya [5] tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışması seçilmiştir. Bu çalışmada rijit olarak mesnetlenmiş bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki temas problemi incelenmiştir. Tabakaya, R yarıçaplı dairesel rijit bir blok aracılığı ile tekil bir yük simetrik olarak etkimektedir. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem tek tabaka ($N=1$) ve tek integral denkleminden ($M=1$) oluşmaktadır. Probleme ilişkin yükleme ve geometri Şekil 2’de verilmektedir.

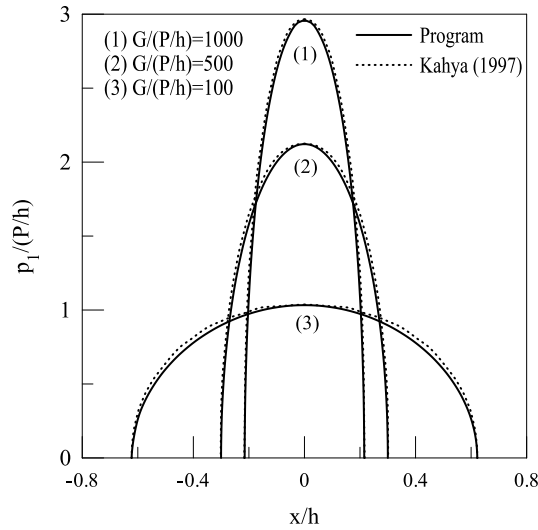


Şekil 2. [5] nolu çalışmadaki temas problemine ilişkin geometri ve yükleme [5]

Tablo 1’te çeşitli yüklem, geometri ve malzeme özellikleri için [5] nolu çalışmada elde edilen temas mesafeleri ile mevcut çalışmada yazılan program ile elde edilen temas mesafeleri karşılaştırılmıştır. Temas mesafeleri [5] nolu çalışma için $[-c, c]$ aralığında olurken mevcut çalışmada $[a_{1L}, a_{1R}]$ aralığında olmaktadır. Tabloda verilen değerler incelendiğinde mevcut çalışmadan elde edilen sonuçların Kahya tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük % Fark 0,04 olarak gerçekleşmiştir. Blok altındaki boyutsuz temas gerilmelerinin farklı $\frac{G}{P/h}$ oranları için karşılaştırılması Şekil 3’te verilmiştir. Şekil incelendiğinde elde edilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

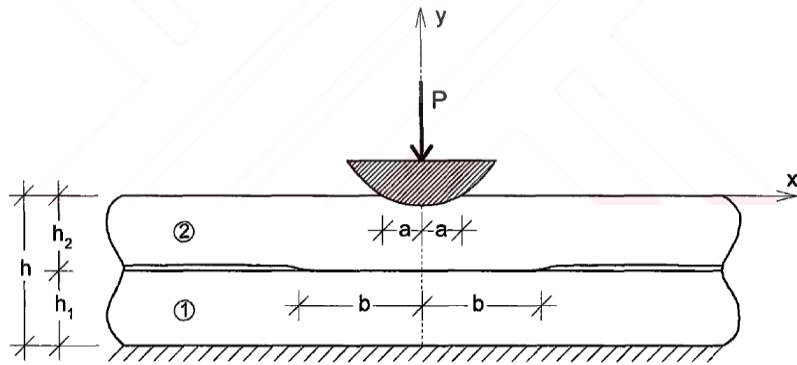
Tablo 1. Çeşitli boyutsuz parametreler için temas mesafelerinin karşılaştırılması

			Kahya [5]	Mevcut çalışma (Program)		% Fark	
$\frac{G}{P/h}$	R/h	κ	c/h	a_{1s}	a_{1e}	a_{1s}	a_{1e}
100	10	2	0,215290	-0,21519051	0,21519099	-0,046	0,046
100	100	2	0,622161	-0,62216683	0,62216739	0,001	-0,001
100	1000	2	1,545286	-1,54536214	1,54536244	0,004	-0,005
500	10	2	0,097407	-0,09740715	0,09740715	0,000	-0,000
500	100	2	0,300239	-0,30024043	0,30024056	0,000	-0,000
500	1000	2	0,830313	-0,83032547	0,83032634	0,001	-0,001
1000	10	2	0,068987	-0,06898726	0,06898725	0,000	-0,000
1000	100	2	0,215208	-0,21520847	0,21520900	0,000	-0,000
1000	1000	2	0,622166	-0,62217092	0,62217082	0,001	-0,001
100	100	1,5	0,567560	-0,56756741	0,56756741	0,001	-0,001
100	100	2,5	0,670244	-0,67025250	0,67025328	0,001	-0,001



Şekil 3. Farklı $\frac{G}{P/h}$ oranları için blok altındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması
($\kappa = 2$, $R/h = 100$)

İkinci çalışma olarak Çömez [7] tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışması seçilmiştir. Bu çalışmada iki tabakadan oluşan bir sistemin ayrılmalı temas (receding) problemi incelenmiştir. Alt tabaka rijit olarak mesnetlenmiş ve üst tabakaya tekil bir yük R yarıçaplı dairesel rijit bir blok aracılığı ile etki ettirilmiştir. Tabakalar yapışık olmayıp aynı veya farklı malzeme özellikleri ve yüksekliğe sahip olabilmektedirler. Problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem iki tabaka ($N=2$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Probleme ilişkin yükleme ve geometri Şekil 4’de verilmektedir.



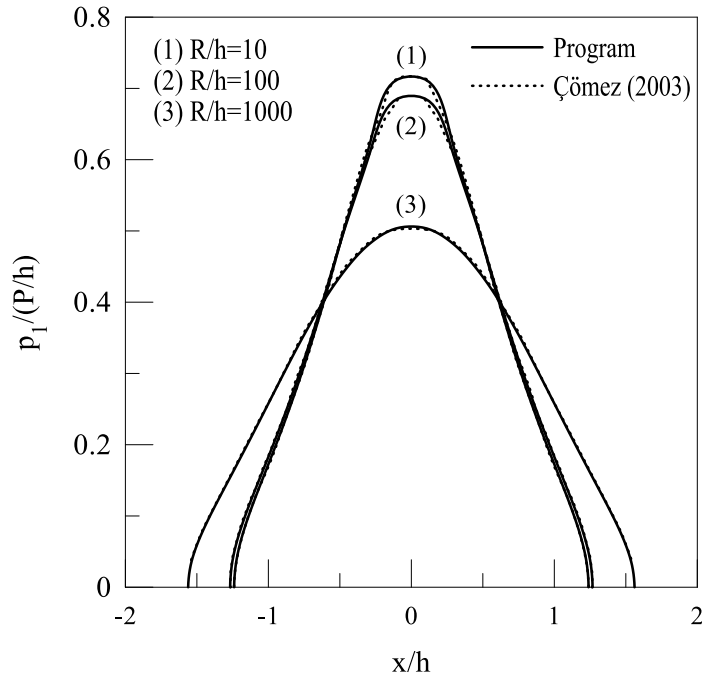
Şekil 4. [7] nolu çalışmadaki temas problemine ilişkin geometri ve yükleme [7]

Tablo 2’de çeşitli yükleme, geometri ve malzeme özellikleri için [7] nolu çalışmada elde edilen temas mesafeleri ile mevcut çalışmadan elde edilen temas mesafeleri karşılaştırılmıştır. Tabloda verilen değerler incelendiğinde [7] nolu çalışmadan elde edilen sonuçların mevcut çalışmanın sonuçlarıyla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük % Fark 0,2 olarak ortaya çıkmaktadır.

Tabakalar arasında meydana gelen temas gerilmelerinin ve blok altındaki temas gerilmelerinin farklı R/h oranları için karşılaştırılması sırasıyla Şekil 5 ve 6’da verilmiştir. Şekiller incelendiğinde, elde edilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

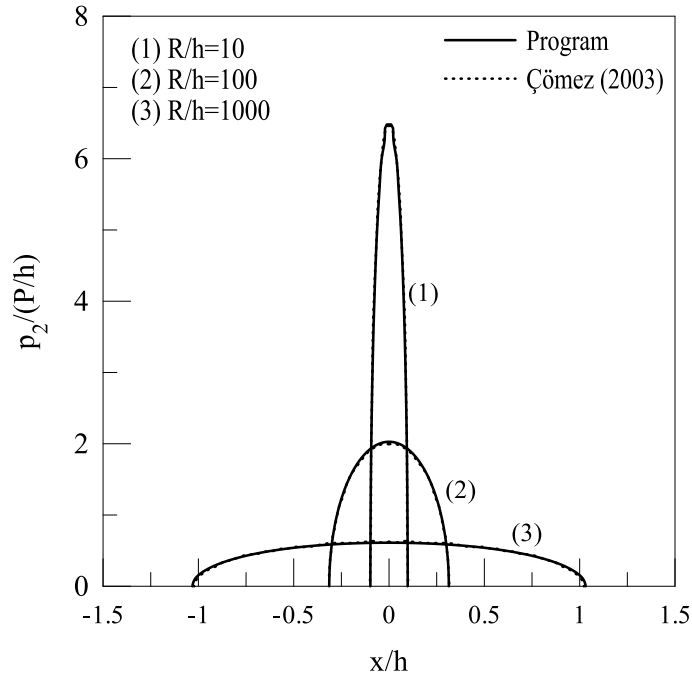
Tablo 2 . Çeşitli boyutsuz parametreler için temas mesafelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $h_1 / h_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$)

$\frac{G_2}{P/h_2}$	R/h_2	κ	Çömez (2003)		Mevcut çalışma (Program)				% Fark			
			a/h	b/h	a_{1s}	a_{1e}	a_{2s}	a_{2e}	a_{1s}	a_{1e}	a_{2s}	a_{2e}
100	10	2	1,25340	0,22026	-1,251823	1,251823	-0,220269	0,220269	-0,13	0,13	0,00	0,00
100	500	2	1,95470	1,58730	-1,953003	1,953003	-1,587949	1,587949	-0,09	0,09	0,04	-0,04
100	1000	2	2,40810	2,13520	-2,409606	2,409607	-2,134888	2,134888	0,06	-0,06	-0,01	0,01
500	10	2	1,24200	0,09788	-1,239558	1,239575	-0,097885	0,097886	-0,20	0,20	0,00	-0,01
500	500	2	1,40250	0,72430	-1,399719	1,399719	-0,724458	0,724458	-0,20	0,20	0,02	-0,02
500	1000	2	1,56410	1,03120	-1,561074	1,561075	-1,031475	1,031475	-0,19	0,19	0,03	-0,03
1000	10	2	1,23950	0,06916	-1,238065	1,238065	-0,069157	0,069157	-0,12	0,12	0,00	0,00
1000	500	2	1,31720	0,50440	-1,316202	1,316201	-0,504431	0,504431	-0,08	0,08	0,01	-0,01
1000	1000	2	1,40240	0,72430	-1,399719	1,399719	-0,724459	0,724459	-0,19	0,19	0,02	-0,02
500	1000	1,12	1,43510	0,85610	-1,433461	1,433461	-0,856263	0,856263	-0,11	0,11	0,02	-0,02
500	1000	2,6	1,63100	1,13350	-1,632405	1,632407	-1,133304	1,133304	0,09	-0,09	-0,02	0,02



Şekil 5. Farklı R/h oranları için tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması

$$\left(\frac{G_2}{P/h_2} = 500, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, h_1 / h_2 = 2, G_1 / G_2 = 1 \right)$$



Şekil 6. Farklı R/h oranları için blok altındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması

$$\left(\frac{G_2}{P/h_2} = 500, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, h_1/h_2 = 2, G_1/G_2 = 1 \right)$$

KAYNAKLAR

- [1] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985
- [2] L.M. Keer, J. Dundurs, K.C. Tsai, Problems Involving a Receding Contact between a Layer and a Half Space, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*. 39 (1972) 1115-1120.
- [3] M. Ratwani, F. Erdogan, On the plane contact problem for a frictionless elastic layer, *International Journal of Solids and Structures*. 9 (1973) 921-936. doi: 10.1016/0020-7683(73)90021-8.
- [4] J.P. Dempsey, Z.G. Zhao, L. Minnetyan, H. Li, Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, *Journal of Applied Mechanics*. 57 (1990) 974-980. doi: 10.1115/1.2897670.
- [5] V. Kahya, *Üst Trafından Rijit Olarak Mesnetlenmiş Elastik Bir Tabaka İle Rijit Blok Arasındaki Sürtünmesiz Değme Problemi*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997
- [6] A. Birinci, R. Erdöl, Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, *Mathematical & Computational Applications*. 4 (1999) 262-272.
- [7] İ. Comez, *Rijit BİR Panç İle Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırksız Çift Şerit Problemi*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003
- [8] G. Adıyaman, M. Yaylaci, A. Birinci, Analytical and finite element solution of a receding contact problem, *Structural Engineering and Mechanics*. 54 (2015) 69-85.
- [9] F. Erdogan, G.D. Gupta, Numerical Solution of Singular Integral-Equations, *Quarterly of Applied Mathematics*. 29 (1972) 525.